ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 DÉCEMBRE 1944.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES MAURAIN.

RENOUVELLEMENT ANNUEL

DU BUREAU ET DES COMMISSIONS ADMINISTRATIVES.

M. **Élie Cartan** est élu Vice-Président pour l'année 1945 par l'unanimité des suffrages exprimés.

MM. **Robert Bourgeois** et **Gabriel Bertrand**, par la majorité absolue des suffrages, sont réélus Membres des Commissions administratives.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** signale que la prochaine séance hebdomadaire aura lieu le mercredi 13 décembre au lieu du lundi 11, jour de la séance annuelle des prix de l'Académie des Sciences morales et politiques.

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE. — *La cristallisation des substances en solutions étendues sur le mercure.* Note de M. **Henri Devaux**.

J'ai montré qu'une très petite quantité d'une solution d'une substance quelconque dans l'eau tend à s'étendre sur le mercure, en donnant une lame monomoléculaire dans laquelle chaque molécule est entourée d'une couronne de molécules d'eau ([1]).

Si, au lieu d'une quantité très petite de la solution aqueuse, on emploie une gouttelette pouvant donner une lame épaisse de plusieurs molécules, il arrive souvent que la substance abandonnée par l'évaporation de l'eau donne des cristaux distincts, dont l'étude m'a paru intéressante, spécialement avec le sulfate de cuivre, le sulfate de zinc et le sulfate de fer, où les phénomènes sont particulièrement nets.

Par un tube capillaire, contenant une solution saturée de sulfate de cuivre, une gouttelette de 10 à 20^{mm^3} est déposée sur une surface de mercure récemment

---

([1]) *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 588.

nettoyée. Elle s'étend aussitôt en une belle nappe épaisse présentant d'abord au centre les anneaux d'interférence. A mesure que l'eau s'évapore, il apparaît, en de nombreux points des parties épaisses de la lame, des disques cristallins très délicats, en forme de houppes plates extrêmement fines, qui flottent et grandissent aux dépens de la nappe liquide. A mesure qu'ils deviennent plus grands, d'autres très petits apparaissent entre eux, montrant que des germes nouveaux se déposent sans cesse. Tous ces disques arrivent bientôt à se toucher et à constituer un élégant carrelage de polygones cristallins, autour duquel les parties minces du voile restent indéfiniment sans cristalliser.

En employant des solutions plus diluées ou de plus petites gouttes, on obtient des disques de plus en plus minces, et à la fin ils sont difficiles à percevoir, même en éclairage punctiforme. Mais, si l'on augmente l'épaisseur de la lame encore fluide, en rétrécissant artificiellement la surface générale, chaque disque presque invisible prend une bordure éclatante qui le fait apercevoir aussitôt. Et il arrive souvent alors que des auréoles brillantes se font voir dans les régions de la lame où l'on ne soupçonnait pas l'existence de disques cristallins. On les rend aussi très visibles par l'action de l'air humide ou de l'haleine, qui altère les cristaux en les rendant fuligineux et bleuâtres ou rougeâtres.

Ces faits prouvent que la cristallisation du sulfate de cuivre s'effectue encore sous une épaisseur extrêmement faible, ne comprenant sans doute qu'un petit nombre de molécules, et la détermination de cette épaisseur devient un problème intéressant à résoudre.

Mes expériences antérieures, faites en particulier sur les solutions de sulfate de cuivre, m'avaient en effet démontré qu'en épaisseur monomoléculaire les solutions de substances étendues sur le mercure, en perdant de l'eau et étant resserrées, prennent l'état visqueux plus ou moins solide, mais ne cristallisent jamais ([2]). Ici il est facile de s'assurer que la région incristallisable, qui occupe la marge des nappes de cristaux, est monomoléculaire. Un petit rectangle délimité dans cette région, dilaté puis comprimé en air humide, devient en effet rigide quand on diminue légèrement sa surface pour rendre les molécules jointives.

Un rectangle analogue, délimité aussi entre deux barrières mobiles, mais choisi dans la région cristalline, étant soumis à l'influence d'une buée et d'une forte extension, montre l'émiettement des cristaux puis leur dissolution, avec constitution finale d'une lame monomoléculaire beaucoup plus étendue que la portion rectangulaire du voile primitif. Le rapport entre la surface nouvelle ainsi établie et la surface du rectangle primitif représente évidemment le nombre d'assises moléculaires que comprenait la nappe cristalline. Ce nombre, qui atteint 40 couches dans les parties épaisses, descend à 5 ou 10 couches et même

---

([2]) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 66, 1943, pp. 1-28.

moins dans les parties minces, spécialement dans la bordure des nappes cristallines.

Les sels de divers métaux ont donné des résultats semblables à ceux obtenus avec le sulfate de cuivre, principalement les sulfates de zinc, de fer, de magnésium, de sodium etc. Les lames formées par une gouttelette de ces solutions ont montré constamment les deux zones, une zone de cristaux dans les parties épaisses et une zone sans cristaux dans les parties minces, lesquelles sont toujours monomoléculaires dans leurs régions les plus minces. Le passage de la région monomoléculaire amorphe à la région cristalline est du reste très brusque; les dernières houppes de cristaux montrent un arrêt complet sur la limite, quoique en contact direct avec de la substance concentrée et fluide.

Quelle est la cause de ce fait intéressant? On serait tenté de supposer que c'est la place qui manque, tout arrangement des molécules en édifice cristallin demandant un espace minimum. Mais il arrive souvent que, même sur cette limite, l'épaisseur de la zone cristalline dépasse 10 ou même 20 diamètres moléculaires, ce qui paraît beaucoup comme espace nécessaire.

En réalité, la véritable cause réside dans une altération du voile dans toutes les régions minces; ce voile y est devenu entièrement insoluble, sans doute par adsorption à la surface du mercure. C'est le phénomène signalé déjà et dont on peut avoir ici une démonstration frappante en soumettant une lame à centre cristallisé à l'action de l'air humide ou même d'une buée. On constate alors que tout ce qui est cristallin se fluidifie par dissolution dans l'eau déposée, tandis que tout ce qui est mince et non cristallisé reste insoluble et rigide par compression.

Si l'on remet alors la lame à l'air libre, les parties fluidifiées subissent une nouvelle cristallisation, tandis que les parties minces restent inertes et incristallisables.

Le renouvellement de la cristallisation des parties épaisses est du reste de plus en plus entravé, parce que, sous l'influence de l'eau, des portions croissantes de la substance deviennent à leur tour insolubles et incristallisables. *L'épaisseur limite de développement* des cristaux dans une lame polymoléculaire est donc variable; elle dépend de l'âge de cette lame et de l'humidité ambiante.

Les faits signalés ici apportent de nouvelles preuves de l'existence des réarrangements moléculaires dans les couches superficielles et font soupçonner l'importance de ces réarrangements.

CORRESPONDANCE.

MM. **Alphonse Baudouin** et **Maurice Loeper** prient l'Académie de bien vouloir les compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Médecine et Chirurgie par la mort de M. *Charles Achard*.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur un procédé de traduction analytique de propriétés arithmétiques.* Note de M. **André Roussel**, présentée par M. Élie Cartan.

De nombreuses propriétés arithmétiques peuvent être rattachées à une condition d'extremum. Ainsi, N étant quelconque, pour que p entier, inférieur à N soit premier, il faut et il suffit que, posant

$$y = \cos \pi x \cos \pi \frac{p}{x},$$

le maximum de y^2 dans l'intervalle $(2, p-1)$ soit inférieur à 1.

Une étude plus approfondie montre que y^2 doit rester inférieur à α^2, avec $\alpha = \sqrt{1 - N^{-6}}$, la différence $\alpha^2 - y^2$, toujours positive pour p premier, devenant négative sur certains intervalles dans le cas contraire. Exprimer que p est premier revient à exprimer, par une condition où p figure seul, que $\alpha^2 - y^2$ n'est jamais négative pour $2 \leqq x \leqq p - 1$. Parmi les procédés permettant d'exprimer qu'une fonction ne change pas de signe dans un intervalle ou dans un domaine, nous utiliserons le suivant, qui se généralise pour un nombre quelconque de variables. Pour que $f(x)$ ne devienne jamais négative dans (a, b), il faut et il suffit que

$$\int_a^b f(x)\, e^{-kf(x)}\, dx > 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

nous avons ainsi une infinité de conditions, mais, dans de nombreux cas, les renseignements déjà possédés sur f permettront de les réduire à une seule. En appliquant au problème précédent on aboutit au théorème : Pour que $p < N$ soit premier, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$\int_2^{p-1} (\alpha - y)\, e^{ny}\, dx > 0 \qquad \text{et} \qquad \int_2^{p-1} (\alpha + y)\, e^{-ny}\, dx > 0,$$

α, N, y ayant le même sens que ci-dessus, et n étant un nombre unique pris arbitrairement parmi ceux qui satisfont à

$$n > 2N^6 \operatorname{Log}(8N^{14}).$$

Des raisonnements analogues s'appliqueraient à

$$u = \cos \pi x \cos \pi \frac{(p-1)!}{p} x \qquad (1 \leqq x \leqq p - 1)$$

(p premier équivaut à $u^2 < 1$). Des considérations du même genre permettraient d'obtenir des conditions traduisant la propriété pour deux ou plusieurs nombres d'être premiers entre eux, etc. Pour donner un autre exemple de cette

méthode, nous allons l'appliquer au *théorème de Fermat*. Il équivaut à

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathrm{F} - m \equiv \mathrm{F} - 64^{-1} n^{-2} \mathrm{N}^{-4n+2} \equiv \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y + \sin^2 \pi z + (x^n + y^n - z^n)^2 - 64^{-1} n^{-2} \mathrm{N}^{-4n+2} > 0\,;$$

dans tout domaine D défini par

$$1 \leqq x \leqq \mathrm{N}, \qquad 1 \leqq y \leqq \mathrm{N}, \qquad 1 \leqq z \leqq \mathrm{N}.$$

$(\mathcal{E})$ équivaut à

$$\int_{\mathrm{D}} (\mathrm{F} - m)\, e^{-h\mathrm{F}}\, d\mathrm{V} > 0,$$

où h désigne un nombre unique très grand pris arbitrairement parmi ceux qui satisfont à

$$h > 128\, n^2 \mathrm{N}^{4n-2} \log \{ 16 \times 3072^3\, n^{11} \mathrm{N}^{22n-13} \times (\mathrm{N} - 1)^3 [3 + 4\mathrm{N}^{2n}] \}$$

(résultat suceptible d'être amélioré, donné à titre d'indication).

Remarques. — 1° Soient $f(x)$ une fonction continue quelconque et w_k le quotient de

$$\int_a^b f(x)\, e^{-kf(x)}\, dx \quad \text{par} \quad \int_a^b e^{-kf(x)}\, dx\,;$$

on montre facilement que w_k tend vers le minimum absolu de f dans (a, b) pour k tendant vers $+\infty$. Ce résultat s'étend au cas d'un nombre quelconque de variables et comporte d'autres généralisations.

2°. Reprenons une condition telle que

$$g \equiv \alpha^2 - \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} > 0$$

traduisant la propriété que p soit premier. On en tire

$$\mathrm{I}(\varphi) = \int_2^{p-1} g \varphi^2\, dx > 0.$$

Cette inégalité peut, dans une certaine mesure, être considérée comme une conséquence du fait que p est premier. Il y a là l'indication d'une méthode de recherche des propriétés des nombres premiers, moyennant un choix convenable des fonctions φ, et cette méthode serait applicable à beaucoup d'autres questions. Ainsi il pourrait être intéressant de rechercher, par ce procédé, des conséquences du *théorème de Fermat*.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la géométrie des masses et son application à la géométrie des coniques et aux intégrales multiples.* Note de M. **David Wolkowitsch**, présentée par M. Paul Montel.

Soit S, un système plan de masses m_i appliquées aux points $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$, admettant une ellipse centrale d'inertie de Culmann e dont l'ellipse conjuguée

sera désignée par ε (c'est une conique imaginaire); le centre d'inertie est un point O du plan. Nous posons

$$\Sigma m_i = \mathrm{M},$$

M, O, e, ε sont les éléments fondamentaux d'inertie.

Deux systèmes rigides qui ont mêmes éléments fondamentaux d'inertie sont *dynamiquement équivalents*.

1° Nous avons précédemment démontré que tout système S pouvait être remplacé par un système dynamiquement équivalent, composé de trois masses ponctuelles μ_i, appliquées aux sommets d'un triangle A_i, *conjugué par rapport à la conique* ε $(i = 1, 2, 3)$.

2° Étant donnée une conique $f(x, y) = 0$, C, dans le plan du système S, et un système σ, dynamiquement équivalent, formé de masses μ_i aux points ξ_i, η_i, on a

$$\Sigma m_i f(x_i, y_i) = \Sigma \mu_i f(\xi_i, \eta_i),$$

3° De 1° et 2°, on conclut aisément que la relation

$$\Sigma m_i f(x_i, y_i) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la conique C soit harmoniquement circonscrite à la conique ε.

Il suffit, pour le voir, de prendre deux sommets du triangle sur la conique C, ce qui est toujours possible.

4° Certains théorèmes relatifs aux coniques harmoniquement inscrites peuvent, grâce au théorème 3°, se démontrer très simplement.

5° Les indicatrices d'inertie de Culmann permettent d'étendre à des systèmes S de masses affectées de signes, les notions de moment d'inertie et de conique centrale d'inertie.

La conique centrale d'inertie peut alors être une hyperbole; nous continuons à désigner par ε l'hyperbole conjuguée.

Soit maintenant l'intégrale double $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, étendue à un domaine D considéré comme une aire homogène, possédant une conique ε que nous savons déterminer.

Il résulte des articles précédents que *cette intégrale est nulle pour tout domaine possédant une conique* ε *harmoniquement inscrite dans la conique* $f(x, y) = 0$.

6° Soit $\Phi(x, y)$ une fonction quelconque, conservant une valeur finie dans l'étendue du domaine; nous la considérons comme donnant la densité locale au point (x, y).

Le domaine n'a plus une densité uniforme, mais nous pouvons encore déterminer sa conique ε conjuguée de la conique centrale d'inertie, nous avons cet énoncé :

L'intégrale $\iint_D \Phi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy$ *est nulle si la conique* ε *est harmoniquement inscrite dans la conique* $f(x, y) = 0$.

A noter pour 5° et 6° qu'il n'est pas nécessaire que le domaine D soit d'un seul tenant; il peut être constitué de parcelles isolées les unes des autres.

7° Il existe, pour les intégrales $\iiint_V \Phi(x, y, z) f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ et $\int_L \Phi(x) f(x)\, dx$, des énoncés analogues à celui du paragraphe 6.

Pour l'intégrale ordinaire, $f(x)$ est un trinome du second degré; la conique ε est décomposée en deux points imaginaires qui forment, avec les points d'abscisses x_1 et x_2 (racines du trinome), une division harmonique : L est le segment de l'axe des abscisses sur l'étendue duquel on effectue l'intégration.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Le problème du coin d'huile.*

Note de M. **Fernand Charron**, présentée par M. Henri Villat.

Le lecteur rétablira la figure d'après les indications suivantes :

Le plan horizontal xoy, matérialisé par une bande de glace bien polie, mouillée d'huile, se meut parallèlement à ox, dans le sens de sa longueur, avec la vitesse $-U_0$.

Une glace rectangulaire, de largeur assez grande et de longueur a, est immobile au-dessus de la bande et très près d'elle, dans une position faiblement inclinée limitant un film d'huile, en forme de coin, d'épaisseur h_0 pour $x = 0$ et h_a pour $x = a$ $(h_a > h_0)$.

Soit α l'angle des deux plans; l'épaisseur correspondant à l'abscisse x est $h = h_0 + \alpha x$.

La pression p et la vitesse, de composantes u suivant ox et w suivant oz, sont régies par les équations

$$(1) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

auxquelles il faut joindre l'équation de continuité

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Le frotteur rectangulaire est assez large, ou encore muni de joues étanches, de telle sorte que la coordonnée y n'intervient pas.

Suivant une remarque connue [1], il résulte de ces équations que la pression p doit être harmonique. En effet, en dérivant les équations (1) respectivement par rapport à x et z, puis ajoutant en tenant compte de (2), il vient identiquement $(\partial^2 p/\partial x^2) + (\partial^2 p/\partial z^2) = 0$.

---

[1] H. Villat, *Leçons sur les fluides visqueux*, p. 121.

Or, la solution d'O. Reynolds [2] est obtenue à partir des équations (1) en admettant que $\partial^2 u/\partial x^2$ est négligeable par rapport à $\partial^2 u/\partial z^2$, et que la pression p est seulement fonction de x et non de z. Il résulte de ces simplifications les valeurs suivantes de p et de u

$$p - \mathrm{H} = -\frac{6\eta u_0}{\alpha h_0}\frac{h-h_0}{h}\left(1 - \frac{h_m}{2h_0}\frac{h+h_0}{h}\right), \tag{3}$$

$$u = u_0\frac{z-h}{h}\left(1 - 3z\frac{h-h_m}{h^2}\right), \tag{4}$$

dans lesquelles H représente la pression atmosphérique et h_m l'épaisseur du film correspondant au maximum de pression $h_m = 2h_0 h_a/(h_0 + h_a)$.

On peut donc reprocher à la solution (3) de ne pas être harmonique. D'ailleurs p, étant seulement fonction de x, serait alors du premier degré. Cependant ces expressions de p et de u semblent bien représenter les phénomènes réels. Il y a lieu, afin d'éclairer cette divergence apparente, tout d'abord de calculer les ordres de grandeur respectifs des deux termes $\partial^2 u/\partial z^2$ et $\partial^2 u/\partial x^2$.

On trouve immédiatement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -6u_0\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_m}{h^3}\right). \tag{5}$$

Pour calculer $\partial^2 u/\partial x^2$ il est commode d'utiliser la remarque suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial h}\frac{dh}{dx} = \alpha\frac{\partial u}{\partial h}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial h^2};$$

il vient alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\alpha^2 u_0 z}{h^3}\left(4 - \frac{9z}{h} - \frac{9h_m}{h} + \frac{18zh_m}{h^2}\right). \tag{6}$$

La comparaison des formules (5) et (6) montre que $\partial^2 u/\partial x^2$ est d'un ordre de grandeur $1/\alpha^2$ fois plus petit que $\partial^2 u/\partial z^2$. Or l'épaisseur maxima de ces lames d'huile correspondant au jeu d'un coussinet est de l'ordre du 1/10 de millimètre pour une longueur de 10^{cm}. α est donc de l'ordre du 1/1000 et α^2 du 1/100000.

Beaucoup d'approximations, utilisées couramment en physique mathématique, sont moins heureuses.

Relation entre la pression et l'effort normal. — On pourra objecter que p est une expression mathématique différente de ce que les manomètres mesurent, que l'indication de ces appareils donne l'effort normal, enfin que c'est l'effort normal N_3 parallèle à oz qui jouit de la propriété d'être fonction de x seul, et non pas la pression p.

Or les deux efforts normaux N_1 et N_3 sont reliés à la pression p par les

---

(2) *Philos. Trans. Royal Soc. London*, **201**, 1886, p. 157.

formules connues

$$N_1 = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - p, \qquad N_3 = 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} - p; \tag{7}$$

d'ailleurs, en vertu de l'équation (2) de continuité, $\partial u/\partial x$ et $\partial w/\partial z$ ont la même valeur absolue. Or $\partial u/\partial x$ dut être calculé pour former l'expression $\partial^2 u/\partial x^2$. On trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha u_0 z}{h^2}\left(-4 + \frac{6h_m}{h} + \frac{6z}{h} - \frac{9zh_m}{h^2}\right), \tag{8}$$

expression qui est de l'ordre de grandeur de $\alpha u_0/h_0$ et peut même s'annuler avec z, tandis que $p - \mathrm{H}$ est de l'ordre de grandeur de $u_0/\alpha h_0$, c'est-à-dire $1/\alpha^2$ fois plus considérable (sauf tout près des extrémités où $p - \mathrm{H}$ s'annule). Donc pression et efforts normaux se confondent au signe près. Ce que l'on mesure est bien la pression.

Des travaux en cours montreront dans quelle mesure les formules s'accordent avec les résultats des expériences.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Écoulements laminaires dans le cas où la viscosité du fluide varie suivant le lieu.* Note de MM. **Edmond Brun** et **Marcel Vasseur**, présentée par M. Henri Villat.

Les équations de l'hydrodynamique des fluides visqueux s'écrivent habituellement en supposant constante la viscosité. Quand il existe de forts gradients de température (couches limites thermiques, par exemple), une telle supposition ne constitue qu'une approximation très grossière, surtout si la viscosité varie rapidement avec la température (huiles). En tenant compte de la variation de viscosité, les équations s'écrivent (fluide incompressible non soumis à des forces massiques et en régime permanent) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Considérons un écoulement laminaire et permanent entre deux plaques planes et parallèles, distantes de $2h$. Les trois premières équations (1) s'écrivent (axe Ox, parallèle aux lignes de courant et équidistant des plaques, axe Oy perpendiculaire aux plaques)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

La première équation exprime que le profil des vitesses est indépendant de x.

La troisième équation montre que la pression est constante le long de l'axe Oy. La deuxième équation peut dès lors s'écrire

$$\nu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - y_m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3}$$

où y_m est l'ordonnée correspondant au maximum de vitesse. Les hypothèses faites sur l'écoulement impliquent que ν varie, avec le site, suivant une loi de la forme $\nu = (\partial p/\partial x) g(y)$.

L'intégration de (3) donne

$$u = \int_{-h}^{y} \frac{y - y_m}{\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dy \qquad \text{avec } y_m = \frac{\displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{y}{\nu} dy}{\displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{dy}{\nu}}. \tag{4}$$

Le rapport des efforts tangentiels sur les deux plaques est, d'après (3),

$$\frac{\tau_{-h}}{\tau_{+h}} = \frac{h + y_m}{h - y_m}. \tag{5}$$

2. Pour fixer une loi de variation de la viscosité avec le site, supposons les plaques maintenues respectivement aux températures θ_{+h} et θ_{-h}. Dans le plan xOy, les conditions thermiques aux limites et le profil des vitesses étant indépendants de x, il en sera de même du profil des températures, et l'équation générale de la transmission de la chaleur en régime laminaire se réduit à

$$\theta = \frac{\theta_{+h} - \theta_{-h}}{2h} y + \frac{\theta_{+h} + \theta_{-h}}{2}. \tag{6}$$

La viscosité $\mu = \nu\rho$, qui est liée à la température par la relation $\mu = 1/f(\theta)$, ne dépend, comme θ, que de y, et le gradient $\partial p/\partial x$ est constant. L'intégrale (4) peut s'écrire, en tenant compte de (6),

$$\left\{ \begin{aligned} & u = \frac{4h^2}{(\theta_{+h} - \theta_{-h})^2} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{\theta_{-h}}^{\theta_{+h}} (\theta - \theta_m) f(\theta)\, d\theta \\ & \text{avec } y_m = \frac{2h}{\theta_{+h} - \theta_{-h}} \left[\frac{\displaystyle\int_{\theta_{-h}}^{\theta_{+h}} \theta f(\theta)\, d\theta}{\displaystyle\int_{\theta_{-h}}^{\theta_{+h}} f(\theta)\, d\theta} - (\theta_{-h} + \theta_{+h}) \right]. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Dans le cas de plaques maintenues respectivement à 25° et à 50° et d'une huile dont la viscosité varie, entre ces deux températures, suivant une loi sensiblement parabolique, de 450 CGS à 71 CGS, le sommet de la courbe des vitesses, au lieu d'être sur l'axe Ox, comme dans le cas d'une viscosité constante, est déportée, vers la plaque chaude, d'une longueur égale à $7h/25$. Le rapport des efforts tangentiels sur les plaques est donc $16/9$.

3. Il est aussi aisé de traiter le cas d'un écoulement laminaire permanent

entre deux cylindres circulaires coaxiaux, de rayons r_1 et r_2 et maintenus respectivement à des températures θ_1 et θ_2. Le mouvement est régi par l'équation

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{C} \left[e^{-\frac{2K}{C}} \int_{\theta_1}^{\theta} e^{\frac{2\theta}{C}} f(\theta)\, d\theta - R_m^2 \int_{\theta_1}^{\theta} f(\theta)\, d\theta \right],$$

où $C_1 K$ et R_m sont des constantes qui se calculent graphiquement si l'on construit les courbes $1/\mu = f(\theta)$ et $e^{2\theta/C} f(\theta)$.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la théorie du nucléon; le spin isotopique et les forces nucléaires.* Note (¹) de M. **Jean-Louis Destouches.**

1. Dans des travaux antérieurs j'ai montré que le principe de relativité et le principe d'inertie conduisaient à associer à chaque corpuscule simple un certain nombre d'opérateurs qui sont les générateurs d'un anneau dit *anneau fondamental*; ces opérateurs sont liés par un système d'équations dit *système fondamental* (²). L'hamiltonien est de la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_1 \partial_x + \mathbf{A}_2 \partial_y + \mathbf{A}_3 \partial_z - \frac{i}{\hbar} c \mathbf{M} \mathbf{A}_4.$$

M est appelé *opérateur de masse*; un corpuscule est à *masse simple* si $\mathbf{M} = m$, *à masse multiple* si **M** a plusieurs valeurs propres m_i; j'ai considéré ailleurs de tels corpuscules (³).

A chaque solution de ce système correspond un type possible de corpuscule. Les différents types peuvent être classés suivant les valeurs propres des opérateurs fondamentaux, notamment de l'opérateur de masse et des opérateurs de spin. Le type le plus simple est celui de l'électron de Dirac. M. Robert Murard (⁴) a étudié diverses solutions du système fondamental; l'une d'elles paraît susceptible de représenter adéquatement le nucléon (c'est-à-dire le proton et le neutron).

En effet le nucléon est un corpuscule à masse double : m_p dans l'état proton, m_n dans l'état neutron. Si le spin isotopique, introduit d'une manière formelle par M. Heisenberg, a une signification physique, cette signification doit être liée au caractère double de la masse, et les opérateurs de spin isotopique doivent apparaître automatiquement lors de l'étude de l'anneau fondamental. Cette hypothèse se confirme par le fait que l'opérateur **M** s'exprime par une matrice de rang 2 et qu'une base de l'anneau de ces matrices est fournie par les matrices $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\tau}_x$, $\boldsymbol{\tau}_y$, $\boldsymbol{\tau}_z$, ces trois dernières étant celles de Pauli et utilisées par Heisenberg pour représenter le spin isotopique. C'est bien ce que prouvent les calculs de

---

(¹) Séance du 1er mai 1944.

(²) *Principes fondamentaux de Physique théorique*, III, Paris, 1942, p. 757.

(³) J.-L. Destouches, *Les électrons lourds* (*Actual. scient.*, fasc. 729, Paris, 1938).

(⁴) Voir la Note ci-après.

M. Murard en montrant que l'anneau fondamental se décompose en le produit de l'anneau des α de Dirac par l'anneau de masse (matrices de rang 2). Ainsi *le spin isotopique résulte du caractère double de la masse et apparaît sur l'anneau fondamental d'un corpuscule élémentaire de masse double;* de ce fait il a une signification physique.

Une équation d'ondes pour le nucléon s'obtient donc comme conséquence de ma théorie générale des corpuscules.

2. Habituellement on rattache le spin isotopique à la charge, mais ceci n'est pas satisfaisant, car la charge n'est pas une propriété aussi primitive que la masse (la masse figure dans l'hamiltonien d'un corpuscule isolé, la charge ne se manifeste que si le corpuscule est placé dans un champ électromagnétique) et ce n'est pas la charge double, mais la masse double qui introduit des matrices de rang 2; on constate que les conditions d'invariance relativiste permettent autant de valeurs de la charge que de valeurs de la masse, avec des valeurs qui demeurent indéterminées. L'opérateur de charge $\mathbf{q}$ s'exprime donc au moyen de l'anneau de masse. Pour obtenir le nucléon il faut ajouter, à l'hypothèse de la masse double, le fait que, dans l'état massique m_p, la charge est $+e$ et que, dans l'état massique m_n, la charge est 0; d'où les opérateurs $\mathbf{M}$ et $\mathbf{q}$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}[(m_p + m_n)\mathbf{1} + (m_p - m_n)\boldsymbol{\tau}_z)], \qquad \mathbf{q} = \frac{e}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}_z).$$

3. Les corpuscules obtenus par fusion suivant la méthode de M. Louis de Broglie n'ont pas des opérateurs fondamentaux qui satisfont au système fondamental, et se comportent comme des systèmes fondus. On a ainsi un critère pour distinguer les corpuscules complexes des corpuscules élémentaires. On parvient ainsi à un atomisme absolu indépendant des procédés de morcellement envisagés.

Le spin est défini habituellement comme un opérateur qui, ajouté à l'opérateur moment-cinétique, fournit en l'absence de champ une intégrale première; mais un tel opérateur n'est pas unique (sauf dans le cas de Dirac). J'ai préféré définir le spin en liaison avec les changements d'orientation des repères (groupe des rotations); la définition est alors univoque et le spin ainsi défini, ajouté au moment-cinétique, fournit bien une intégrale première.

4. Pour un système de deux corpuscules de Dirac, l'expression que j'avais donnée autrefois ([5]) pour l'opérateur d'interaction $\mathbf{R}_0$ se montre, d'après les calculs de M. Murard, la seule acceptable sous les conditions d'invariance de la théorie relativiste des systèmes que j'ai développée; en effet aux conditions que j'ai indiquées ([6]), on doit encore adjoindre la condition $\Sigma \mathfrak{a}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{0}$, car $\mathbf{R}_0$ est une fonction des $\mathbf{B}^{(i)} x_\mu^{(i)}$ et l'invariance n'est assurée que si $\Sigma \mathbf{B}^{(i)} \mathfrak{a}^{(i)}$ est nul; mais,

---

([5]) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 1403; voir aussi J.-L. Destouches et S. Slansky, *Comptes rendus*, **217**, 1943, p. 472.

([6]) *Principes fondamentaux de Physique théorique*, III, pp. 784-787, Paris, 1942.

si $x_\mu^{(i)}$ est une quantité numérique, il y a commutation avec $\mathbf{B}^{(i)}$ et l'invariance exige que la condition supplémentaire soit aussi vérifiée, et celle-ci entraîne la forme indiquée pour l'opérateur $\mathbf{R}_0$. Pour des corpuscules à valeurs multiples de la masse, par exemple des nucléons, l'opérateur d'interaction est de la forme $\mathbf{R} = \Gamma\mathbf{R}_0$. Pour deux nucléons, l'opérateur d'interaction $\mathbf{R}$ de M. Murard permet de retrouver, sous forme d'actions relativistes directes entre nucléons, avec une relation entre les constantes c, des forces ayant la même forme opératorielle que celles faisant intervenir des échanges de mésons, mais elles diffèrent par la façon dont elles dépendent de la distance : pour les actions directes, la fonction $f(r)$ de la distance r est une fonction entière nulle à l'infini, par exemple e^{-kr} ou $e^{-(kr)^2}$, tandis que les forces d'échange sont de la forme e^{-kr}/r. Les actions directes entre nucléons pourraient donc suffire pour expliquer la stabilité des noyaux, mais le rayonnement β s'y oppose.

5. Si l'on considère un système formé uniquement de nucléons, les interactions sont fixées par le principe de superposition [7]; la somme des spins isotopiques est une intégrale première, par suite le nombre de neutrons et de protons du système se conserve, il ne peut y avoir de radioactivité β; pour qu'il y ait radioactivité, il faut considérer un système contenant à la fois des nucléons et des mésons (qui peuvent être dans l'état d'annihilation) : on est ramené à la théorie habituelle. Mais ceci n'empêche que l'on doive tenir compte des interactions directes entre nucléons (qui agissent sur un domaine de l'ordre du rayon nucléaire comme les forces mésoniques), et l'intervention des nouvelles forces semble permettre de lever certaines des difficultés de la théorie purement mésonique. En outre une théorie relativiste du nucléon est nécessaire pour la théorie des effets produits par les rayons cosmiques.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Définition de quelques types de corpuscules; application au nucléon.* Note [1] de M. **Robert Murard**.

Dans une série d'études M. Jean-Louis Destouches a précisé les fondements de la théorie des corpuscules et systèmes de corpuscules. Chaque type de corpuscule est défini par la donnée de son anneau fondamental dont les générateurs satisfont à un ensemble de relations constituant le système fondamental [2]. Par ailleurs, dans le cas d'un système de corpuscules en interaction, l'opérateur d'interaction $\mathbf{R}$ se détermine à l'aide d'un certain nombre de relations faisant intervenir les opérateurs de l'anneau fondamental des corpuscules constituants [3]. Ayant poursuivi les recherches amorcées par

(7) J.-L. Destouches, *loc. cit.*, p. 792.

(1) Séance du 1er mai 1944.

(2) *Principes fondamentaux de Physique théorique*, III, Paris, 1942, p. 757.

(3) *Ibid.*, pp. 793-794-795.

M. Destouches (4) sur le système fondamental et la forme des opérateurs d'interaction, nous avons obtenu les résultats suivants :

1. Les nombres entre parenthèses désignant les valeurs propres des opérateurs; tout corpuscule de spin $(-1/2, +1/2)$ (spin défini au moyen du groupe des rotations) et de masse $(-m, +m)$ suit les lois d'un corpuscule de Dirac. L'opérateur d'interaction de deux corpuscules de ce type est nécessairement de la forme déjà indiquée par M. Destouches (5)

$$\mathbf{R}_0 = f(r_{12})\left[\mathbf{1} + \vec{\alpha}^{(1)}\vec{\alpha}^{(2)}\right][\alpha_4^{(1)} + \alpha_4^{(2)}]^2[\alpha_5^{(1)} + \alpha_5^{(2)}]^2,$$

où $f(r_{12})$ est une fonction entière de la distance nulle à l'infini.

2. Il n'existe pas de corpuscule de spin $(-1/2, 0, +1/2)$ et de masse $(-m, +m)$.

3. Pour tout corpuscule de spin $(-1, 0, +1)$ et de masse $(-m, +m)$, les opérateurs de l'anneau fondamental satisfont aux mêmes relations algébriques que ceux d'un corpuscule de Dirac, à l'exception des opérateurs de spin, qui sont de la forme

$$\mathbf{s}_{jk} = \sigma_{jk} + \frac{i}{2}\alpha_j\alpha_k.$$

Les $(i/2)\alpha_j\alpha_k$ sont les opérateurs de spin d'un corpuscule de Dirac. Les opérateurs σ_{jk} satisfont entre eux aux mêmes relations de non-commutation que les précédents et peuvent être représentés par les matrices de Pauli. Ils commutent avec tous les autres opérateurs de l'anneau fondamental et sont intégrales premières. Un tel corpuscule n'apparaît pas comme physiquement distinct d'un corpuscule de Dirac; la solution ainsi trouvée est une solution parasite du système fondamental.

4. Plus généralement, les mêmes circonstances se présentent pour tous les corpuscules de masse $(-m, +m)$: on peut donc dire que tout corpuscule de masse $(-m, +m)$ suit les lois d'un corpuscule de Dirac.

5. Tout corpuscule de spin $(-1/2, +1/2)$ apparaît comme un corpuscule de Dirac ayant plusieurs états de masse possibles. L'opérateur d'interaction de deux corpuscules de ce type est de la forme $\mathbf{R} = \Gamma\mathbf{R}_0$, où Γ est un opérateur de l'anneau des opérateurs de masse permettant, pour chaque corpuscule du système, le passage d'un état de masse à un autre.

Il semble que le nucléon puisse être considéré comme un corpuscule de ce type, possédant deux états de masse : l'état de masse m_p caractériserait l'état proton, l'état de m_n caractériserait l'état neutron. L'hamiltonien d'un tel

(4) *Journal de Physique*, 8e série, **8**, juin 1937, p. 251 et **10**, février 1939, p. 105; *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 1403.

(5) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 1403; J.-L. Destouches et S. Slansky, *ibid.*, **217**, 1943, p. 472.

corpuscule est

$$\mathbf{H} = -i\hbar c(\mathbf{A}_1\,\partial_x + \mathbf{A}_2\,\partial_y + \mathbf{A}_3\,\partial_z + \mathbf{C}),$$

avec, comme opérateurs fondamentaux,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{1}\times\alpha_i, \qquad \mathbf{C} = -\frac{ic}{\hbar}\mathbf{M}\times\alpha_4, \qquad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_n \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{jk} = -i\mathbf{s}_{jk} = \mathbf{1}\times\frac{1}{2}\alpha_i\alpha_j, \qquad \mathbf{T}_i^+ = -\mathbf{T}_i = \mathbf{1}\times\frac{1}{2}\alpha_i, \qquad \mathbf{S}_{sy} = \mathbf{1}\times\alpha_4,$$

les α_i étant les opérateurs d'un corpuscule de Dirac. L'anneau fondamental est le produit de l'anneau des α par l'anneau dont fait partie l'opérateur $\mathbf{M}$; ce dernier anneau peut être défini par les opérateurs de base

$$\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\tau}_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\tau}_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\tau}_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

et *les trois opérateurs* $\boldsymbol{\tau}_x$, $\boldsymbol{\tau}_y$, $\boldsymbol{\tau}_z$ *peuvent être assimilés aux composantes du spin isotopique*. L'état proton et l'état neutron correspondent respectivement aux valeurs propres $+1$ et -1 de l'opérateur τ_z.

L'opérateur d'interaction de deux corpuscules de ce type peut être précisé si l'on admet le principe suivant : *Pour un système ne contenant que des nucléons, le spin isotopique total* (*ou la masse totale*) *se conserve*. Ce principe n'est vrai que si l'on ne fait pas intervenir d'autres corpuscules susceptibles d'agir sur le système (en particulier des mésons). Alors si les deux nucléons sont tous deux dans les états proton ou neutron, ils restent dans leur état; s'il y a un proton et un neutron ils peuvent s'échanger.

Si l'on admet ce principe, on obtient pour l'opérateur d'interaction de deux nucléons la formule suivante, valable à l'approximation non relativiste,

$$\mathrm{R} = f(r_{12})\left[c + c_\sigma \vec{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}.\vec{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} + c_\tau \vec{\boldsymbol{\tau}}^{(1)}.\vec{\boldsymbol{\tau}}^{(2)} + c_{\sigma\tau}\vec{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}.\vec{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}\vec{\boldsymbol{\tau}}^{(1)}.\vec{\boldsymbol{\tau}}^{(2)}\right],$$

avec les notations de M. Louis de Broglie [6]. Les coefficients c, c_σ, c_τ, $c_{\sigma\tau}$ sont fonctions uniquement du produit $\boldsymbol{\tau}_z^{(1)}\boldsymbol{\tau}_z^{(2)}$ et de la somme $\boldsymbol{\tau}_z^{(1)} + \boldsymbol{\tau}_z^{(2)}$.

Conclusion. — On voit que l'étude de l'anneau fondamental d'un corpuscule permet de mettre en évidence la notion de spin isotopique, et d'obtenir la forme de l'interaction directe de deux nucléons.

PHYSIQUE. — *Dérivation des courbes expérimentales.*

Note [1] de M. **Pierre Vernotte**, présentée par M. Aimé Cotton.

La dérivation est une opération extrêmement difficile. Ce n'est pas qu'il soit délicat de tracer la tangente en chaque point d'une courbe, il existe pour cela

---

(6) *De la Mécanique ondulatoire à la théorie du noyau*, Paris, 1943, pp. 202-204.

(1) Séance du 20 novembre 1944.

des appareils ingénieux; mais, lorsqu'on trace une ligne au mieux à travers des points expérimentaux, on se préoccupe essentiellement de la valeur correcte qu'on attribuera aux ordonnées, et non de l'allure qui en résultera pour cette ligne. Aussi la détermination au mieux de la dérivée d'une fonction définie par des points expérimentaux ne saurait-elle être (²) la dérivée de l'expression analytique passant au mieux à travers ces points. Ceci est la condamnation des machines à dériver, puisqu'elles supposent un tracé continu préalable.

Il suffit d'une très faible retouche au tracé d'une courbe pour modifier d'une façon notable la distribution de la dérivée le long de la courbe.

La raison profonde de la difficulté, c'est qu'il n'existe aucune définition expérimentale de la dérivée. La dérivation est exclusivement une opération mathématique, portant sur une fonction bien définie; et l'on peut même observer que, si l'on peut toujours calculer mathématiquement une dérivée, on n'en fait pas moins appel à une valeur *limite* étrangère aux valeurs effectives des variables, artifice qui n'a pas d'analogue en matière expérimentale.

Nous avons montré (³) que, si l'on cherchait à calculer une valeur d'une ordonnée, régularisée par les valeurs des ordonnées voisines, la précision de l'ordonnée régularisée était notablement plus grande que la précision d'une ordonnée individuelle lorsqu'il s'agissait d'une ordonnée prise vers le milieu de l'intervalle expérimental, mais que cette précision était peu augmentée aux extrémités de l'intervalle. Corrélativement l'*allure* d'une ligne expérimentale est particulièrement incertaine à ses extrémités, et ceci explique les anomalies que l'on peut trouver faussement aux bouts de l'intervalle expérimental.

Si la courbe expérimentale à dériver est solution d'une équation différentielle, on peut avoir intérêt à faire porter les calculs non sur la fonction expérimentale, mais sur la solution de l'équation. On évite l'embarras de calculer une dérivée, ce qui n'est pas surprenant, puisqu'on utilise la donnée supplémentaire qu'est l'équation différentielle. Mais on n'évite pas l'incertitude qui pèse expérimentalement sur toute loi comportant des dérivées, car, si les intégrations empiriques ne soulèvent aucune difficulté, leurs *conséquences* sont très sensibles à de toutes petites incertitudes sur la fonction à intégrer : il n'y a pas d'artifice mathématique qui puisse corriger une imperfection physique foncière.

Il n'y a pas d'algorithme qui puisse permettre de déduire de points expérimentaux la valeur de la dérivée. Il faut donc de toute nécessité substituer à cette collection de points une loi mathématique. L'opération de dérivation restera cependant indiscutable si la dérivée calculée est *indépendante* de la loi mathématique choisie. Sur un intervalle très court, une représentation du

---

(²) Il peut arriver cependant qu'une expression judicieusement choisie ait précisément par elle-même l'allure exigée par un phénomène physique (cf. *Comptes rendus*, **210**, 1940, p. 329).

(³) *Comptes rendus*, **213**, 1941, p. 983; **216**, 1943, p. 289.

second degré est certainement suffisante. Soit h l'équidistance des $(2N+1)$ ordonnées expérimentales, l'arc s'étendant de $-Nh$ à $+Nh$. Si on le représente par une expression ax^2+bx+c, la dérivée, au centre de l'intervalle, sera b. Or nous avons trouvé [4] une formule unique donnant la meilleure valeur de b, *indépendamment* d'un terme éventuel du 2ᵉ degré, quelle que soit, donc, la loi représentative : le calcul correct de la dérivée δ en résulte par la formule

$$(1) \quad N(N+1)h\delta = (y_{N+2}+y_{N+3}+\ldots+y_{2N}+y_{2N+1}) - (y_1+y_2+\ldots+y_{N-1}+y_N).$$

Si les ordonnées expérimentales ne sont pas équidistantes, on trouve qu'il suffit de remplacer dans cette formule $N(N+1)h$ par $\sum_{N+2}^{2N+1} x_i - \sum_{1}^{N} x_i$, les x_i étant les abscisses de ces ordonnées.

Le calcul est correct et suffisamment précis si N est assez grand, $(2N+1)h$ étant petit, c'est-à-dire si les points expérimentaux sont *très serrés*, condition absolue. S'ils sont peu serrés, il faut se résigner à diminuer beaucoup N, de manière à conserver un arc court, condition essentielle de correction.

Il est essentiel de calculer la dérivée pour tous les points successifs, afin que l'erreur affectant la dérivée au point M_i soit compensée par l'erreur affectant les points M_{i-1} et M_{i+1}. Le tracé de la courbe dérivée est alors bien déterminé.

La méthode ne s'applique qu'à partir du $(N+1)^{\text{ième}}$ point expérimental, et cesse de s'appliquer au $(N+1)^{\text{ième}}$ avant la fin de l'intervalle. Si l'on veut avoir, dans ces intervalles résiduels, une évaluation de la dérivée, il faut réduire progressivement la valeur de N, ce qui réduit fortement la précision. Nous retrouvons, sous une autre forme, ce fait déjà rencontré que l'allure d'une courbe devient imprécise aux extrémités de l'intervalle expérimental.

Du fait de l'imprécision des observations, la courbe que l'on dérive est un peu ondulée; si on lit le long d'une graduation, on peut même considérer que l'erreur est périodique, ayant pour période, quant aux ordonnées, un degré de la graduation. La période selon les abscisses est, en gros, inversement proportionnelle à la dérivée δ. On peut montrer, et l'expérience le vérifie, que le calcul de la dérivée par la formule (1) amplifie assez fortement son ondulation réelle, proportionnellement à peu près à $1 : \delta^2 N^2$.

Nous avons appliqué ces considérations à la dérivation, dans le temps (en vue du calcul de coefficients de convection) de courbes de refroidissement spontané d'un corps chaud. Les températures étaient mesurées avec un thermomètre au demi-degré (pointés assez peu précis), le refroidissement total atteignant une quinzaine de degrés; mais, comme les lectures étaient au nombre d'une centaine $(N=10)$, le tracé de la courbe dérivée était défini à 0,5 % près, ce qui est excellent.

---

(4) *Comptes rendus*, 215, 1942, p. 568.

PHOTOGRAPHIE. — *Nouvelle méthode d'étude d'une émulsion photographique. Pouvoir résolvant.* Note de Mlle **Gaultier du Marache**, présentée par M. Aimé Cotton.

La transformation de Fourier permet d'envisager les phénomènes de diffraction à l'infini connus sous le nom de *franges de Frauenhoffer* sous un aspect simple et très général.

L'état du mouvement vibratoire dû à la propagation de la lumière à travers le plan xOy de la pupille d'un appareil d'optique est défini par une fonction

$$F(x, y) = \rho(x, y)e^{i\varphi(x,y)},$$

où $\rho(x, y)$ est l'amplitude et $\varphi(x, y)$ la phase. Les variables u et v définissant la direction des rayons diffractés, la figure de diffraction à l'infini est donnée par la fonction $G(u, v)$ qui se déduit de $F(x, y)$ par la transformation réciproque de Fourier

$$G(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)e^{-i2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy,$$

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(u, v)e^{i2\pi(ux+vy)}\,du\,dv.$$

Ce théorème est dû à H. Scheffers [1]. P. M. Duffieux lui a donné des développements mathématiques, non encore publiés, qui ont suggéré la méthode d'analyse suivante.

Dans le montage que j'ai utilisé, la répartition $F(x, y)$ est fournie par un réseau placé entre un collimateur et un appareil photographique réglé sur l'infini. La fente du collimateur est éclairée en lumière monochromatique.

Dans une première expérience le réseau est constitué par l'une des glaces d'une trame de photogravure sur laquelle sont gravées des bandes noires séparées par des bandes transparentes. Puis on substitue à ce réseau sa photographie sur plaque ou film, tirée par contact sous un éclairage normal.

Le réseau original répartit l'onde lumineuse suivant une fonction réelle à une seule variable, $f_0(x)$, dont la transformée $g_0(u)$, fonction d'une variable, représente l'ensemble des spectres de différents ordres donnés par le réseau, chacun de ces spectres contenant une seule raie. Nous appelons *spectre monochromatique* du réseau l'ensemble de ces raies.

La photographie du réseau doit être comparée au réseau complémentaire du réseau original où bandes noires et transparentes sont interverties. Les spectres monochromatiques des deux réseaux ne diffèrent que par le signe des amplitudes des raies d'ordres pair.

Sur la reproduction photographique du réseau, l'irradiation crée une zone

---

(1) *Ann. der Phys.*, **42**, v, 1942, pp. 211-215.

dégradée autour des bandes noires, l'émulsion est granuleuse, des irrégularités de cette émulsion créent des variations accidentelles d'absorption et des différences de marche. La photographie du réseau donne dans la pupille une répartition à deux variables

$$F'(x, y) = \rho'(x, y)e^{i\varphi(x,y)}.$$

L'amplitude $\rho'(x, y)$ peut être considérée comme la somme de deux fonctions :

1° Imaginons que l'on superpose les courbes suivant lesquelles varie le facteur d'absorption dans chacun des traits de la photographie du réseau et que l'on trace la courbe de variation moyenne. Un réseau périodique régulier R sur lequel le facteur d'absorption varierait partout suivant cette loi fournirait une distribution de l'amplitude exprimée par une fonction à une variable $\rho_1(x)$.

2° La différence entre la distribution $\rho'(x, y)$ effective et celle que donnerait le réseau R est représentée par une fonction de deux variables $\rho_2(x, y)$ qui totalise tous les défauts de la photographie :

$$\rho'(x, y) = \rho_1(x) + \rho_2(x, y).$$

La transformée $G_1(u)$ de $\rho_1(x)$ exprime le spectre monochromatique du réseau R et correspond aux raies que donne, avec le montage spectroscopique, la photographie du réseau. La transformée $G_2(u, v)$ de $\rho_2(x, y)$ correspond à de la lumière diffuse et à une déformation légère des raies.

Le facteur exponentiel $e^{i\varphi(xy)}$ est introduit par les différences de marche accidentelles. Il a pour transformée $g(u, v)$ qui représente la tache lumineuse que l'on obtiendrait dans le plan focal de l'appareil photographique en annulant le facteur d'absorption sur toute l'étendue de la photographie du réseau. La transformée $G'(u, v)$ de $F'(x, y)$, que l'on observe finalement dans ce plan focal, résulte d'une dissipation aplanétique opérée sur la somme

$$G_3(u, v) = G_1(u) + G_2(u, v),$$

la figure de dissipation étant $g(u, v)$ (²). Cette dissipation déforme légèrement les raies et introduit de la lumière diffuse dans tout le champ. Son influence est manifestée en remplaçant la photographie du réseau par une plaque développée sans avoir été impressionnée. Dans les montages réalisés la lumière diffuse correspondant à $G(u, v)$ et à la dissipation $g(u, v)$ est très inférieure à la lumière parasite diffusée par les pièces optiques. En première approximation on peut la négliger dans l'étude des raies du réseau R.

Pour un temps de pose suffisant le spectre monochromatique du réseau original n'est limité que par le format de la chambre photographique. Je compte plus de cent raies de part et d'autre de la raie centrale d'ordre zéro. Au contraire le spectre monochromatique du réseau R moyen ne comporte

qu'un nombre limité de raies. L'abscisse de la dernière raie fournit la plus petite période reproductible par l'émulsion photographique dans les conditions où elle a été impressionnée et développée, c'est-à-dire la limite de son pouvoir résolvant ([2]). L'ensemble des raies fournit des renseignements sur les déformations de l'image dues à l'émulsion.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Calcul du champ créé par le mouvement d'une charge électrique*. Note ([1]) de M. **Émile Durand.**

Nous avons donné ([2]), sous forme de développement en série, les potentiels correspondant au champ électromagnétique créé par une charge en mouvement; nous allons donner une application de ces formules dans le cas où la trajectoire reste à l'intérieur d'un domaine spatial limité et quand on calcule les potentiels à l'extérieur de ce domaine.

Si l'on a $\sqrt{\xi^u_u} < (\sqrt{2}-1)\sqrt{x^u_u}$, on peut développer en série les puissances de r ([3])

$$r^p = [x^\nu_\nu + \xi^\nu_\nu - 2x_\nu\xi^\nu]^{\frac{p}{2}} = R^p \sum_{q=0}^{q=\infty} C^q_{\left(\frac{p}{2}\right)} R^{-2q}.[\xi^\nu_\nu - 2x_\nu\xi^\nu]^q.$$

On a posé $R = \sqrt{x^\nu_\nu}$ et $C^m_n = (m!)^{-1}.n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$. Le potentiel vecteur s'écrit alors, en supposant la charge égale à l'unité,

$$A^u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{R^{n-1}}{n!}(\pm\partial^k)^n \sum_{q=0}^{q=\infty} C^q_{\left(\frac{n-1}{2}\right)} R^{-2q}[\xi^\nu_\nu - 2x_\nu\xi^\nu]^q \dot{\xi}^u.$$

Pour faire apparaître des développements en série de Taylor, nous allons définir une famille de nombres à deux indices a^q_l par la relation de récurrence

$$2(l+1).a^q_{l+1} = -[q(q+1) - l(l+1)].a^q_l$$

et en posant $a^q_0 = 1$; ces nombres jouent un rôle important dans toutes les questions qui sont en rapport avec les solutions de l'équation dalembertienne; grâce à eux on peut écrire

$$\frac{1}{n!} C^q_{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{1}{2^q}\frac{1}{q!}\sum_{l=0}^{l=q} a^q_{(q-l)} \frac{1}{(n-l)!}.$$

Cette formule n'a de sens que pour $n \geq q$; mais on vérifie aisément que

---

([2]) P. M. Duffieux, *Ann. de Phys.*, **14**, xi, 1940, pp. 303-338.

([1]) Séance du 20 novembre 1944.

([2]) *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 510.

([3]) Il faut en effet $|\xi^\nu_\nu - 2\alpha_\nu\beta^\nu\sqrt{x^\nu_\nu}.\sqrt{\xi^\nu_\nu}| < x^\nu_\nu$ et le cas le plus défavorable se présente pour $\alpha_\nu\beta^\nu = -1$.

pour $n < q$, il suffit de supprimer les termes qui donneraient une valeur négative à l'argument de la factorielle ; dans ces conditions A^u peut s'écrire

$$A^u = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{R^{-2q}}{2^q \cdot q!} \sum_{l=0}^{l=q} a^q_{(q-l)} R^{l-1} (\pm \partial^4)^l \sum_{n=l}^{n=\infty} \frac{R^{n-l}}{(n-l)!} (\pm \partial^4)^{n-l} [\xi^v_v - 2x_v \xi^v]^q \xi^u ;$$

conformément à notre dernière remarque, la sommation sur n va de l à ∞ au lieu de 0 à ∞ ; la dernière somme est le développement en série de Taylor de la fonction $[\xi^v_v - 2x_v\xi^v]\xi^u$ de l'argument $(x_4 \pm R)$; on a donc

$$A^u = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{R^{-2q}}{2^q \cdot q!} \sum_{l=0}^{l=q} a^q_{(q-l)} R^{l-1} (\pm \partial^4)^l \{ [\xi^v_v - 2x_v\xi^v]^q \xi^u \}_{(x_4 \pm R)}.$$

Pour avoir une expression plus explicite développons le dernier crochet et faisons apparaître les grandeurs $\alpha_v = R^{-1} x_v$

$$A^u = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{R^{-2q}}{2^q \cdot q!} \sum_{l=0}^{l=q} a^q_{(q-l)} R^{l-1} (\pm \partial^4)^l \left\{ \sum_{k=0}^{k=q} C^k_q R^k (\xi^v_v)^{q-k} (-2\alpha_v \xi^v)^k \xi^u \right\}_{(x_4 \pm R)}.$$

Pour avoir le potentiel scalaire A^4 on remplace dans cette dernière formule ξ^u par 1 ; voici quelques applications de cette formule générale.

Calcul du rayonnement de la particule. — Dans ce cas on peut négliger les puissances de R autres que R^{-1} ; cette dernière ne s'obtient que pour $k = q$; $l = q$; comme $a^q_0 = 1$, $c^q_q = 1$, il reste

$$A^u = R^{-1} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{q!} (\pm \partial^4)^q \{ (-\alpha_v \xi^v)^q \xi^u \}_{(x_4 \pm R)}.$$

Si l'on se borne aux trois premiers termes ($q = 0, 1, 2$), c'est-à-dire aux termes dipolaires, quadrupolaires, octopolaires, et, si l'on sépare les deux derniers en leur partie symétrique et en leur partie antisymétrique, il vient

$$A^u = R^{-1} \Big\{ \xi^u - (\pm) \frac{1}{2} \alpha_v [(\partial^4)^2 \xi^{uv} - \partial^4 M^{uv}] + \alpha_{vw} [(\partial^4)^3 \xi^{uvw} - (\partial^4)^2 M^{[u(vw)]}] + \ldots \Big\}_{(x_4 \pm R)}$$

avec

$$M^{uv} = [\xi^u \partial^4 \xi^v - \xi^v \partial^4 \xi^u], \qquad M^{[u(vw)]} = [\xi^{vw} \partial^4 \xi^u - \xi^u \partial^4 \xi^{vw}].$$

Calcul plus complet des potentiels à petite distance. — On se limite aux termes $q = 0, 1$; $k = q$; comme $a^1_1 = -1$, on a

$$A^u = \{ R^{-1} \xi^u - R^{-1} (\pm \partial^4)(\alpha_v \xi^v \xi^u) + R^{-2} (\alpha_v \xi^v \xi^u) \}_{(x_4 \pm R)},$$
$$A_4 = \{ R^{-1} - R^{-1} (\pm \partial^4)(\alpha_v \xi^v) + R^{-2} (\alpha_v \xi^v) \}_{(x_4 \pm R)}.$$

Cas de deux charges symétriques par rapport à l'origine. — Si l'on a deux

charges de valeur absolue 1/2, mais de signes contraires, occupant toujours des positions symétriques par rapport à l'origine, on a

$$e_{(1)} = -e_{(2)} \qquad \xi^u_{(1)} = -\xi^u_{(2)} \qquad \text{d'où} \qquad \dot{\xi}^u_{(1)} = -\dot{\xi}^u_{(2)} \qquad \ddot{\xi}^u_{(1)} = -\ddot{\xi}^u_{(2)} \qquad \ldots$$

Quand on forme $A = A_{(1)} + A_{(2)}$ avec les expressions du paragraphe précédent, tous les termes contenant un nombre pair de fois la lettre ξ disparaissent ; il reste

$$A^u = A^u_{(1)} + A^u_{(2)} = \{ R^{-1} \dot{\xi}^u \}_{(x_4 \pm R)},$$
$$A^4 = A^4_{(1)} + A^4_{(2)} = \{ - R^{-1} (\pm \partial^4) \alpha_\nu \xi^\nu + R^{-2} (\alpha_\nu \xi^\nu) \}_{(x_4 \pm R)};$$

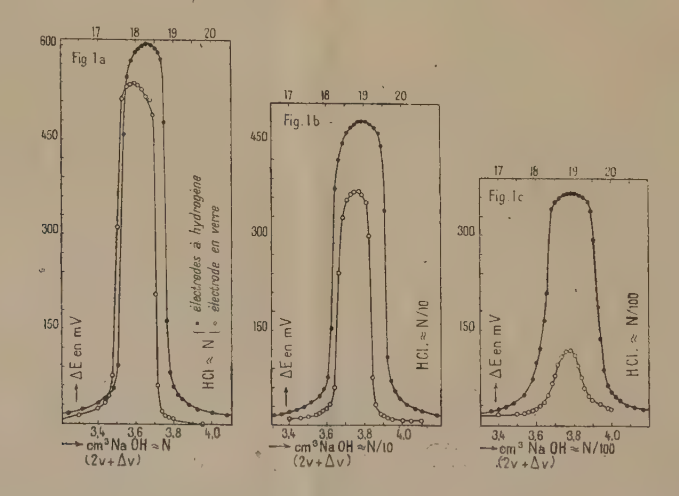
on reconnaît bien les formules classiques de l'oscillateur dipolaire.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Titrage potentiométrique différentiel ; comparaison du montage à électrode en verre avec le montage à électrodes à hydrogène.* Note de M. **Léon Giraut-Erler.**

Après avoir étudié ([1]) l'influence de la différence de marche Δv des deux burettes, nous étudions ici l'influence de la concentration A et B des réactifs (cas où $A \approx B$).

Nous avons opéré avec $\Delta v = 0^{cm^3},1$ et $V = 2^{cm^3}$ pour l'électrode en verre, et avec $\Delta v = 0^{cm^3},5$ et $V = 10^{cm^3}$ pour les électrodes à hydrogène.

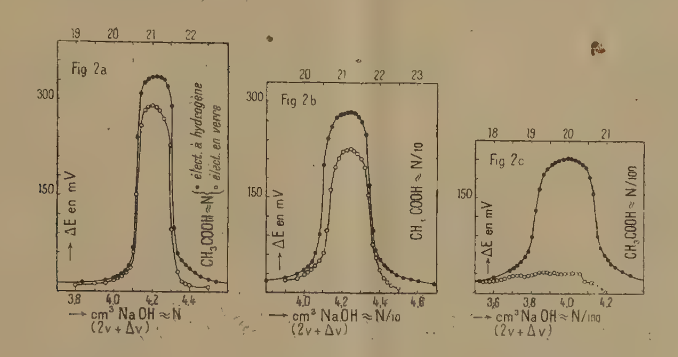
a. Titrage d'un acide fort par une base forte. — Les figures **1 *a*, 1 *b*** et **1 *c***



montrent que l'on obtient bien des maxima nets avec l'électrode en verre même avec $A \approx B \approx N/100$, bien que dans ce dernier cas le maximum, quoique net, soit beaucoup moins élevé qu'avec les électrodes à hydrogène.

([1]) *Comptes rendus*, 217, 1943, p. 537.

b. Titrage d'un acide monovalent obéissant à la loi d'action de masse par une base forte. — Les figures 2*a*, 2*b* et 2*c* montrent qu'à l'encontre du cas



précédent, *on n'obtient pas de maximum net avec* A ≈ B ≈ N/100 avec l'électrode en verre. On ne pourra donc pas titrer des acides faibles en concentrations *très faibles* au moyen du dispositif employé.

Ce fait est dû :

a. à l'altération de la membrane de verre (verre spécial mou) pour les pH élevés;

b. à l'intervention du gaz carbonique de l'air dès qu'on a dépassé la neutralité dans une des deux branches de l'électrode en verre pour titrages différentiels.

Nous avons constaté de plus que, pour toutes les concentrations où les titrages se révèlent faisables, les deux modes de titrage différentiel essayés donnent pratiquement les mêmes résultats pour le *dosage* sous la réserve toutefois que $\Delta v/V$ ne soit pas trop grand [1].

CHIMIE ORGANIQUE. — *Obtention d'un nouvel acide résinique, l'acide dextrosapinique.* Note de M. **René Lombard**, présentée par M. Marcel Delépine.

J'ai indiqué [1] une méthode d'analyse des galipots de Pin que j'ai appliquée à deux espèces de Pin et à l'Épicéa, qui sécrète une résine très voisine des résines de Pin. J'ai pu doser, dans les sécrétions résineuses étudiées, l'acide lévopimarique, l'acide dextropimarique, et les acides sapiniques. Je me suis attaché, depuis, à l'étude de la partie dite *sapinique*.

Le galipot de Pin d'Alep est particulièrement indiqué pour une telle étude, car, dépourvu d'acide dextropimarique, et contenant une forte proportion d'acides sapiniques, il se prête particulièrement bien à l'extraction de ces derniers. En traitant ce galipot en solution alcoolique par la quinone, j'en ai séparé l'acide lévopimarique à l'état de combinaison quinonique insoluble; les

---

[1] *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 523.

eaux mères contiennent la partie sapinique, qui est précipitée, puis cristallisée; j'ai obtenu ainsi un acide sapinique, de pouvoir rotatoire $[\alpha]_j + 43°$ (²), qui se présente comme un corps pur, et que j'appellerai provisoirement acide A.

J'ai ensuite fait les observations suivantes :

a. en calculant, par application de la loi de Biot, le pouvoir rotatoire de la partie sapinique dans les galipots de Pin d'Alep, de Pin maritime, et de résine d'Épicéa, j'ai chaque fois trouvé un résultat très voisin de $+ 43°$;

b. j'ai pu extraire directement, par des cristallisations fractionnées, l'acide A, des sécrétions de Pin maritime et d'Épicéa, après avoir éliminé l'acide lévopimarique à l'état de combinaison quinonique;

c. en préparant des mélanges synthétiques d'acides lévopimarique, dextropimarique, et d'acide A, en proportions convenables, j'ai pu reconstituer les galipots avec toutes leurs propriétés, et, en particulier, les mêmes courbes d'isomérisation qu'avec les galipots naturels; la forme *en cloche* des courbes d'isomérisation est due à ce que l'acide lévopimarique s'isomérise beaucoup plus rapidement en acide abiétique que l'acide A (environ 100 fois plus vite); l'acide lévopimarique est responsable de la branche de gauche de la courbe d'isomérisation; la branche de droite correspond à l'isomérisation de l'acide A.

Il résulte de ce qui précède que l'acide A est le *constituant exclusif ou, du moins, presque exclusif* (cette restriction correspondant à l'incertitude de la méthode, qui est de l'ordre de 1 à 2 %), de la partie sapinique des galipots étudiés.

*Je lui ai donné le nom d'*acide dextrosapinique.

Les principales propriétés de l'acide dextrosapinique sont les suivantes : pouvoir rotatoire $[\alpha]_j + 43°$, formule $C^{20}H^{30}O^2$; point de fusion 145°; indice de diène à la température ordinaire, nul; il est intégralement transformable en acide abiétique, sous l'action de l'acide chlorhydrique.

Conclusion. — Sous leur complexité apparente (Tschirch avait dénombré 45 acides en étudiant une dizaine de résines de Pin), les galipots sont relativement simples; en me bornant aux sécrétions résineuses que j'ai pu obtenir sur le territoire métropolitain, j'ai trouvé que celles-ci ne contiennent que trois acides résiniques, l'acide lévopimarique, l'acide dextrosapinique, l'acide dextropimarique, tous trois en $C^{20}H^{30}O^2$. J'ai l'impression que de nombreuses sécrétions de Conifères ont des compositions analogues, et j'ai l'intention de poursuivre mes études dans ce sens, dès que les circonstances me permettront de me procurer une gamme étendue de résines de Conifères d'origine étrangère.

(²) $[\alpha]_j$ correspond à la longueur d'onde $\lambda = 0^{\mu},578$.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Nouveaux dérivés du stilbène et du triphényléthylène.* Note de MM. **Buu-Hoï**, **Hiong-Ki-Wei**, **Antoine Lacassagne** et **Jean Lecocq** présentée par M. Marcel Delépine.

Au cours de ces dernière années, il a pu être montré (1) que des substances possédant des configurations moléculaires proches de celles des hydrocarbures cancérigènes pouvaient inhiber l'action de ces derniers, vraisemblablement en diminuant la probabilité d'absorption de ces toxiques par les cellules de l'organisme. D'autre part (2) on sait que des composés œstrogènes, naturels (œstrone, équiline, équilénine) aussi bien que synthétiques (triphényléthylène, stilbœstrol), provoquent eux aussi l'apparition de tumeurs. L'idée vient alors à l'esprit de se demander s'il ne serait pas possible de trouver des substances structurellement voisines de ces hormones, capables d'inhiber l'action de ces derniers corps par un processus de même nature que celui invoqué plus haut. Le pouvoir œstrogène intense des hormones naturelles et synthétiques est lié à la présence d'hydroxyles phénoliques; nous avons été amenés à préparer au contraire une série d'hydrocarbures possédant soit le squelette du *trans*-stilbène, soit celui du triphényléthylène. Dans le premier cas, il s'agit d'α.β-dialcoyl-stilbènes et d'α-alcoyl-β-aryl-stilbènes de formule générale (I); dans le second, ce sont des triphényléthylènes alcoylés sur la chaîne latérale, répondant au schéma (II) :

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ R \end{matrix}\!>\!C{=}C\!<\!\begin{matrix} R' \\ C_6H_5 \end{matrix} \quad \text{(I)}$$

a. $R = C_2H_5$, $R' = C_3H_7\,n$;
b. $R = C_2H_5$, $R' = CH_2{-}CH{=}CH_2$;
c. $R = C_2H_5$, $R' = C_4H_9\,n$;
d. $R = C_2H_5$, $R' = C_5H_{11}\,n$;
e. $R = C_2H_5$, $R' = C_5H_{11}$ iso;
f. $R = C_2H_5$, $R' = C_{10}H_7\,\alpha$;
g. $R = R' = C_3H_7\,n$;
h. $R = R' = C_4H_9\,n$;
i. $R = C_3H_7\,n$, $R' = C_4H_9\,n$;
j. $R = C_4H_9\,n$, $R' = C_5H_{11}\,n$;
k. $R = C_5H_{11}\,n$, $R' = C_{10}H_7\,\alpha$.

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!>\!C{=}C\!<\!\begin{matrix} C_6H_5 \\ R \end{matrix} \quad \text{(II)}$$

a. $R = C_3H_7\,n$;
b. $R = CH_2{-}CH{=}CH_2$;
c. $R = C_4H_9\,n$;
d. $R = C_5H_{11}\,n$;
e. $R = C_5H_{11}$ iso;
f. R = cyclohexyl (C_6H_{11}).

Les uns et les autres de ces corps se préparent en faisant agir des halogénures d'alcoyl (ou d'α-naphtyl)-magnésium sur des désoxybenzoïnes α-alcoylées (III) et en déshydratant les alcools tertiaires ainsi formés; l'alcoylation de la désoxybenzoïne se fait au mieux par l'amidure de sodium, et la déshydratation des carbinols, par l'acide formique pur :

$$\underset{\text{(III)}}{C_6H_5{-}CHR{-}CO{-}C_6H_5} \xrightarrow{R'MgHal} C_6H_5{-}CHR{-}C(OH)R'{-}C_6H_5 \xrightarrow[HCO_2H]{} C_6H_5{-}CR{=}CR'{-}C_6H_5.$$

---

(1) Lacassagne, Buu-Hoï et P. Cagniant, *C. R. Soc. Biol.*, 138, 1944, p. 16; Lacassagne, Buu-Hoï, Rudali et Daudel, *ibid.*, p. 282.

(2) Lacassagne, in *Ergebnisse der Vitamin-und Hormonforschung*, 2, Leipzig, 1939, p. 259.

Les substances de formule générale (I) sont des huiles incolores plus ou moins mobiles ou des résines visqueuses; par contre les triphényléthylènes alcoylés (II) sont toutes des solides bien cristallisés. Les corps nouveaux suivants ont été synthétisés :

1° *α.n-butyl-désoxybenzoïne* $C^{18}H^{20}O$ (III, $R = C^4H^9$); cristallise de l'alcool (très soluble à chaud) sous forme de fines aiguilles incolores F 57°, $É_{15}$ 210-212°. 2° *α.n-amyl-désoxybenzoïne* $C^{19}H^{22}O$ (III, $R = C^5H^{11}$); aiguilles très solubles F 38°, $É_{13}$ 218-220°, n'ayant pas fourni de semicarbazone même après plusieurs jours. 3° *α-éthyl-β.n-propyl-stilbène* ($C^{19}H^{22}$ (I*a*); on fait agir l'éthyl-désoxybenzoïne sur 3 molécules de bromure de propylmagnésium en refroidissant sous l'eau; l'addition terminée, on fait bouillir doucement pendant une demi-heure, décompose par la glace et le chlorure d'ammonium, lave à l'eau la couche éthérée, la sèche, chasse l'éther et chauffe au bain-marie bouillant le carbinol brut obtenu avec un gros excès d'acide formique à 98% pendant 2 heures. On ajoute de l'eau, extrait l'hydrocarbure formé au benzène, lave la solution benzénique à l'eau alcaline, la sèche, évapore le solvant, et distille le résidu. Liquide incolore, mobile, $É_1$ 145°, d'odeur accentuée désagréable, ne cristallisant pas à la glacière. 4° *α-éthyl-β-allyl-stilbène* $C^{19}H^{20}$ (I*b*); huile mobile, incolore, $É_{1,5}$ 145-148°. 5° *α-éthyl-n-butyl-stilbène* $C^{20}H^{24}$ (I*c*); liquide fluide, faiblement ambré $É_{1,5}$ 145°. 6° *α-éthyl-n-amyl-stilbène* $C^{21}H^{26}$ (I*d*); huile mobile $É_{1,5}$ 153°. 7° *α-éthyl-isoamyl-stilbène* $C^{21}H^{26}$ (I*e*); huile ambrée assez fluide, $É_1$ 140-145°. 8° *α-éthyl-β-naphtyl-(α)-stilbène* $C^{26}H^{22}$ (I*f*); huile extrêmement visqueuse, non cristallisable, mais se figeant en une laque jaune pâle, $É_{1,5}$ 220°. 9° *α.β-di-n-propyl-stilbène* $C^{20}H^{24}$ (I*g*); huile mobile incolore, $É_{1,5}$ 145-150°. 10° *α.β-di-n-butyl-stilbène* $C^{22}H^{28}$ (I*h*); huile assez fluide, $É_{1,5}$ 153°155°. 11° *α.n-propyl-β.n-butyl-stilbène* $C^{21}H^{26}$ (I*i*); huile assez mobile, sensiblement incolore, $É_{1,5}$ 145°-150°. 12° *α.n-butyl-β.n-amyl-stilbène* $C^{23}H^{30}$ (I*j*); huile légèrement visqueuse et ambrée, $É_{1,5}$ 158-162°. 13° *α.n-amyl-β-naphtyl-α-stilbène* $C^{28}H^{26}$ (I*k*); résine jaunâtre, extrêmement visqueuse, cassante, $É_{1,5}$ 225-228°. 14° *n-propyl-triphényléthylène* $C^{23}H^{22}$ (II*a*); cristallise de l'alcool (peu soluble à froid) en longues aiguilles incolores, soyeuses, F 97° distillant vers 180° sous 1^{mm} et se dissolvant facilement dans le benzène. 15° *Allyl-triphényléthylène* $C^{23}H^{20}$ (II*b*); touffes de fines aiguilles soyeuses assez peu solubles dans l'alcool, facilement solubles dans le benzène et l'acétone, F 79°, distillant vers 178-180° sous $1^{mm},5$; se colore en jaune par l'acide sulfurique pur (comme tous ses homologues). 16° *n-butyl-triphényl-éthylène* $C^{24}H^{24}$ (II*c*); aiguilles soyeuses, courtes, peu solubles dans l'alcool, F 88°, distillant vers 190° sous 2^{mm}. 17° *n-amyl-triphényléthylène* $C^{25}H^{26}$ (II*d*); touffes de fines aiguilles soyeuses légères, F 100°, distillant vers 180° sous $1^{mm},5$. 18° *Isoamyl-triphényl-éthylène* $C^{25}H^{26}$ (II*e*); aiguilles soyeuses, peu solubles dans l'alcool, très solubles dans le benzène, F 65°, distillant vers 184° sous $1^{mm},8$. 19° *Cyclohexyl-triphényléthylène* $C^{26}H^{26}$ (II*f*); touffes de belles aiguilles prismatiques, incolores, brillantes, solubles dans le benzène, peu solubles dans l'éther, F 151°, distillant vers 210-213° sous 2^{mm}. Ce corps manifeste une grande tendance à la cristallisation et peut être déshydrogéné par le soufre ou le sélénium en *tétraphényléthylène* $(C^6H^5)^2C = C(C^6H^5)^2$, F 224°, déjà décrit souvent dans la littérature.

Toutes ces substances font actuellement l'objet d'un examen de pouvoir carcinogène éventuel et de pouvoir inhibiteur. Un triage sommaire a montré que les corps de formule générale (I) sont généralement assez œstrogènes; ce dernier fait nous incline à assigner à ces corps la structure *trans*, qui, dans la

série du stilbène, est la configuration favorable. La synthèse et l'examen des propriétés de substances appartenant aux groupes (I) et (II) sont poursuivis activement ([3]).

BOTANIQUE. — *Un nouveau procédé de séparation et d'isolement des Diatomées.* Note de M. **René Leboime**, présentée par M. Auguste Chevalier.

Les techniques déjà décrites pour l'isolement des Diatomées ne donnent satisfaction qu'au prix du sacrifice d'une grande partie du matériel traité. La méthode que nous avons mise au point permet de traiter tout matériel, si minime soit-il, et d'en éliminer toutes matières étrangères en conservant, à l'état de pureté, la totalité des Diatomées.

Inspirée des travaux de Thoulet et de Lauby, elle utilise les différences de densité des corps en présence dans la suspension de départ. La faible différence de densité des corps existant généralement dans les mélanges de départ est insuffisante pour que la gravité seule soit utilisable et nous avons employé la centrifugation dans des liquides de densités voisines.

L'utilisation de liquides non miscibles de densités croissantes ne donne, à l'expérience, aucune satisfaction; les différences de tension superficielle empêchent des organismes aussi petits de se laisser mouiller et de passer d'un liquide dans le suivant. Aussi nous avons été amené à n'employer qu'un seul liquide, solution aqueuse de borotungstate de cadmium, liquide non corrosif et de récupération facile, permettant de réaliser par dilution une échelle de densité très étendue.

La solution saturée de ce corps a une densité voisine de 3,6 et doit être déterminée exactement en précisant la 3e décimale. Soient a la densité de cette solution et n son volume en centimètres cubes; le volume d'eau à ajouter à a pour obtenir une solution de densité b est donné par la formule $x = n(a-b)/(b-1)$. Cette relation permet donc, connaissant le volume et la densité de la solution, de la faire passer à une densité plus faible.

A titre d'exemple, la marche à suivre est la suivante pour séparer les Diatomées d'un mélange contenant des éléments de roches diverses, des spicules d'Éponges de densité 2,136, des matières organiques et des Diatomées de densité 2,1. Les frustules de Diatomées ne sont donc point constituées par de l'opale, dont la densité est 2,2.

([3]) Nous apprenons (juin 1945) que Dodds, Lawson et Williams (*Nature*, **148**, 1941, p. 142) ont pu produire des cancers avec l'α-éthyl-β.sec-butyl-stilbène. Ces savants attribuent toutefois cette action à la ressemblance structurale de ce corps avec le 3.4-benzopyrène. D'autre part les premiers résultats montrent que l'α-éthyl-α-isoamyl-stilbène est très fortement œstrogène (activité à $0^{mg},25$ chez la Souris); l'α-éthyl-α-allyl-stylbène est aussi très actif ($0^{mg},50$).

Placer dans un tube à centrifuger, sur 3cm de hauteur, une solution de densité 2,3. Au-dessus, et sans mélanger, au moyen d'une fine pipette recourbée, laisser affluer, sur 2cm de hauteur, une solution de densité 2,15. Puis, par le même moyen, également sur 2cm de hauteur, une solution de densité 2. Les 3 zones restent parfaitement délimitées et leur différence de réfringence suffit pour le constater. A ce moment, ajouter, avec précaution, environ 1cm³ du matériel à séparer en suspension dans de l'eau pure. Centrifuger ensuite à 5000 t:min pendant 4 minutes. Après cette opération, l'on constate qu'une partie des matières organiques est répartie sur la zone de séparation de l'eau pure et du liquide de densité 2; une autre portion, ayant franchi cette zone, s'est réunie à la limite de séparation des liquides de densité 2 et 2,15. Toutes les Diatomées, parfaitement intactes, se trouvent entre les zones de densité 2,15 et 2,3. Les spicules, les roches diverses et le sable sont parvenus au fond du tube. Il ne reste plus qu'à prélever la couche de Diatomées au moyen d'une pipette à tétine dont on promène, pendant l'aspiration, l'orifice sur toute la surface de séparation des liquides. Les frustules des Diatomées sont ensuite lavées à l'eau pure jusqu'à élimination du borotungstate.

Une nouvelle centrifugation ménagée dans un liquide de densité 2,009 permet de séparer selon leur taille les Diatomées ainsi isolées. Les grosses espèces se trouvant à la partie inférieure et les plus petites restant dans les régions supérieures. En effet, bien que de même poids spécifique, les frustules plongées dans un liquide de densité très faiblement inférieure à leur densité propre acquièrent une vitesse de précipitation proportionnelle à leur surface et, par rapport à son poids, une petite espèce présente une surface plus grande qu'une grosse.

Cette technique, rapide et souple, peut, en employant des liquides miscibles de densités choisies, se prêter à l'isolement de diverses particules inorganiques ou même de petits organismes, si l'immersion dans des liquides hypertoniques n'entraîne pas de déformations importantes de ces organismes.

GÉNÉTIQUE. — *Sur un cas singulier de variation désordonnée dans les fleurs de* Matthiola. Note de Mme **Cécile Sosa-Bourdouil**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Dans une lignée horticole de *Matthiola* à fleurs doubles (var. Cocardeau) j'ai trouvé à côté des plantes non sexuées à fleurs doubles, et des plantes sexuées à fleurs simples qui assurent la conservation de la variété, quelques individus fournissant de bonnes graines et présentant néanmoins un nombre de pétales supérieur à quatre.

Une partie des graines de l'un de ces individus, semées au printemps 1943, a donné au printemps 1944 25 plantes, dont 5 à fleurs doubles, stériles, et 20 ayant un nombre important de fleurs à pétales supplémentaires. Nous décrivons diverses anomalies trouvées chez ces dernières, qui affectent non seulement le périanthe mais aussi l'androcée et le gynécée.

Variations de l'androcée. — Si l'on désigne sous le nom d'étamine le bourrelet de 2 anthères porté par un filet (sans préjuger de leur origine), ce

nombre est normalement 6 pour l'ensemble des Crucifères. Or, sur 100 fleurs prélevées le même jour sur les 20 plantes aberrantes, nous avons trouvé 59 fleurs à 6 étamines (normales) et 41 fleurs à étamines supplémentaires, dont 3 fleurs à 10 étamines, 5 à 9 étamines, 7 à 8 étamines et 26 à 7 étamines. Il arrive que 4 anthères ou plus, à des états de développements parfois différents, soient portées sur un même filet élargi. Si le cas général est, dans cette lignée, une augmentation du nombre des pièces florales, il peut se produire aussi des réductions, notamment en ce qui concerne le nombre des étamines. On a ainsi trouvé une fleur hermaphrodite à une seule étamine. D'autre part il existe des fleurs entièrement mâles ayant 2 ou 4 étamines au lieu de 6; 2 pétales et 2 sépales au lieu de 4. En particulier une de ces fleurs conserve la symétrie pour la disposition des 4 pétales en croix et présente, en même temps que l'avortement complet de l'ovaire, celui des 4 étamines dédoublées et du verticille de sépales correspondant. Enfin on a trouvé une fleur dépourvue non seulement d'ovaire mais aussi d'étamines, composée uniquement d'un sépale et d'un pétale opposé.

Variation du gynécée. — L'augmentation du nombre des placentas ou même des loges a été signalé en 1926 par Miss Saunders chez *Matthiola annua* à fleurs doubles. Dans notre lignée, nous trouvons, à côté d'ovaires ayant un nombre parfois double de placentas, d'autres ovaires d'apparence normale accompagnés de carpelles supplémentaires plus ou moins libres, parfois dépourvus de stigmates, et, comme terme extrême, on a observé jusqu'à 3 fruits à des états différents de développement insérés en verticille sur un même pédoncule.

Prolifération. — Alors qu'en général la prolifération de l'axe floral est limitée aux fleurs doubles non sexuées, nous avons observé un cas de prolifération dans une plante sexuée. De l'extérieur vers l'intérieur il y a : 6 pièces sépaloïdes, dont 4 semblables entre elles et 2 contournées rejetées sur le côté et légèrement pétaloïdes; à l'aisselle de ces dernières il y a 2 boutons sexués et un troisième bouton, central par rapport aux 4 pétales semblables; puis un cycle de 6 étamines indépendantes et dispersées entourant l'axe central où, en place d'ovaire, sont insérés des boutons beaucoup moins développés.

Concrescence. — On constate la concrescence de pièces de même origine ou d'origines différentes appartenant dans la normale à des verticilles voisins. Nous avons vu le cas d'anthères multiples portées sur un même filet élargi, l'ensemble ayant un aspect digité, et les carpelles en nombre variable plus ou moins concrescents. Les pétales sont parfois épaissis au niveau de l'onglet, qui s'épanouit en plusieurs lames blanches développées à divers degrés. On observe aussi la concrescence entre sépale et pétale; pétale et sac pollinique ou étamine; sac pollinique ou étamine et ovaire ou carpelle. Nous avons même trouvé un organe à l'aspect extérieur d'étamine et soudé à la base à un carpelle, présentant des ovules le long du bord libre externe de l'anthère. Par ailleurs, l'union des tissus ayant fonction de carpelle d'une part et de sac pollinique

d'autre part, n'apparaît pas comme une soudure à proprement parler, mais plutôt comme le résultat d'une intrication de tissus de polarités distinctes provenant d'une différenciation désordonnée au cours du développement.

On remarque enfin que divers ovules, portés sur un même carpelle, ne se trouvent pas dans un même état de développement, contrairement à la règle générale chez les Crucifères à silique. Il y a donc intrication des tissus non seulement de natures, mais aussi d'âges différents, traduisant un désordre qui néanmoins n'altère pas l'ordonnance des verticilles floraux.

GÉNÉTIQUE. — *Hybrides triples haploïdes obtenus à partir de trois espèces de* Nicotiana *et transformation de ceux-ci en hybrides diploïdes par l'action de la colchicine.* Note de MM. **Alexandre Fardy** et **Henri Hitier**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Les deux hybrides triples ont été obtenus en croisant les formes amphidiploïdes *Nicotiana glutinosa* L. (*n* 12) × *N. sylvestris* Speg et Comes (*n* 12) et *N. tabacum* L. (*n* 24) × *N. glutinosa* L. (*n* 12), respectivement par les espèces *N. tabacum* L. (*n* 24) et *N. glauca* Grah (*n* 12).

I. L'amphidiploïde *glutinosa* × *sylvestris* associe dans ses cellules somatiques 24 chromosomes *glutinosa* + 24 chromosomes *sylvestris*, et donne après réduction chromatique, des gamètes ayant pour formule 12 + 12 = 24 chromosomes, soit 1 génôme de *glutinosa* + 1 génôme de *sylvestris*. Le croisement de cette forme par *N. tabacum* (*n* 24) engendre un nouvel hybride dont la formule somatique est 12 + 12 + 24 = 48 chromosomes; c'est un hybride triple haploïde, c'est-à-dire associant les garnitures chromosomiques haploïdes de trois espèces différentes. La F_1 de cet hydride est homogène et comprend des pieds très vigoureux dont l'aspect se rapproche du type *Tabacum*. La floraison est très abondante; par son mode d'inflorescence, par la taille, la forme et la pigmentation de ses fleurs, l'hybride présente une juxtaposition des caractères des trois parents; les capsules peu nombreuses sont généralement ridées. Son comportement méiotique est du type à allosyndèse partielle : M_I avec 17 à 19_{II} + 10 à 14_I en dehors de la plaque ou vers la périphérie; la formation des bivalents résulte de l'homologie existant d'une part entre les 12 chromosomes d'origine *sylvestris*, et 12 des 24 chromosomes de *Tabacum*, d'autre part entre quelques éléments de *glutinosa* et une partie des 12 chromosomes restants de *Tabacum*. En A_I les bivalents engendrent des ponts et des fragments; les monovalents retardataires peuvent se diviser. En M_{II} les plaques contiennent chacune 23 à 25 chromosomes, 1 ou 2 chromosomes restent dans le cytoplasme. On observe quelques retardataires en A_{II}. On trouve 40 % de tétrades normales, 55 à 60 % avec 1 ou 2 microcytes et quelques diades. L'hybride forme 30 à 40 % de bon pollen de taille un peu irrégulière. Les capsules contiennent 100 à 150 graines.

Par l'action de la colchicine sur les jeunes plantules nous avons doublé le nombre chromosomique de 4 pieds qui, de ce fait, associent les garnitures diploïdes des trois parents : $24 + 24 + 48 = 96$ chromosomes. Ces pieds sont moins vigoureux que les pieds témoins, ont des feuilles plus petites, déformées, à bords échancrés et à nervation irrégulière. L'inflorescence est moins ramifiée. Les fleurs sont à tube plus gros. Le comportement méiotique est plus régulier : M_I : 45 à 46 formations dont généralement 1 à 3 polyvalents (tétravalents ou trivalents); en dehors du plan 0,1 ou 2_I; en A_I 0,1 ou 2 retardataires. M_{II} comprennent chacune 46 à 49 chromosomes, le plus généralement 47, 48; en A_{II} présence de quelques retardataires; tétrades normales 40 à 50 % ; avec 1 ou 2 ou 3 microcytes 50 à 60 % ; 60 à 70 % de bon pollen. Les capsules contiennent 150 à 250 graines, mais ont tendance à tomber avant leur maturité complète.

II. Le croisement de l'amphidiploïde *Tabacum* × *glutinosa*, dont les gamètes ont pour formule 24 chromosomes de *Tabacum* + 12 chromosomes de *glutinosa*, par *glauca* (*n* 12) nous a donné l'hybride triple haploïde *Tabacum* + *glutinosa* + *glauca* associant les génômes des trois parents, soit $24 + 12 + 12 = 48$ chromosomes. F_I est phénotypiquement hétérogène : feuilles et fleurs de forme, couleur et dimensions variables suivant les pieds, dans l'ensemble est vigoureux et associe les caractères des trois parents. L'hétérogénéité serait due aux différences de constitution génétique des divers pieds, le parent femelle (*Tabacum* × *glutinosa*) n'étant pas une forme amphidiploïde stable. Pollen entièrement composé de grains vides. Hybride totalement stérile. Le comportement méiotique est très irrégulier : formation de quelques bivalents et pseudo-bivalents engendrant en A_I des ponts et des fragments, retardataires et divisions de monovalents; M_{II} à nombres très variables, généralement 21 à 25 avec 1 ou 2 chromosomes dans le cytoplasme. Noyaux de restitution donnant naissance à des diades. Retardataires en A_{II}. Tétrades normales 40 % ; avec 1 ou 2 microcytes 50 % ; diades 10 %.

La forme triple diploïde, obtenue par l'action de la Colchicine a une composition chromosomique correspondant à la formule $(24 + 12 + 12) \times 2 = 96$, stocks diploïdes des trois parents, *Tabacum*, *glutinosa* et *glauca*. En M_I il se constitue une plaque comprenant 41 à 46 formations dont généralement 1 ou 2_{IV}; en dehors de la plaque on compte 3 à 8_I, le plus souvent 4 à 5. M_{II} : 45 à 51 chromosomes, le plus souvent 47, 48, 49. Quelques ponts et retardataires en A_I et A_{II}. Tétrades normales 25 % ; avec un ou plusieurs microcytes 55 %, polyades 20 %. Pourcentage de bon pollen très variable suivant l'époque, généralement 20 à 30 %. Capsules ayant tendance à tomber avant leur maturité et contenant peu de graines, 5 à 25.

En résumé, la réalisation d'hybrides triples haploïdes, rendus par la suite triples diploïdes, montre qu'il est possible, par voie expérimentale, d'associer

dans un même individu les garnitures chromosomiques diploïdes de trois espèces. La fertilité des formes triples diploïdes est plus élevée que celle des triples haploïdes, mais leur méiose comporte encore des irrégularités résultant en grande partie des relations allosyndétiques des éléments parentaux, résultant aussi de l'instabilité de leur milieu génotypique. Au point de vue morphologique l'hybride triple associe des caractères des trois parents.

A 16h l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16h45m.

L. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de novembre 1944.

Cours de Mécanique, 1re *division*, 1942-1943, par Henri Béghin. Paris, 1 vol. polycopié 33cm (présenté par M. J. Pérès).

Cours de Mécanique, 2e *division*, 1943-1944, par Henri Béghin. Paris, 1 vol. polycopié 33cm (présenté par M. J. Pérès).

Université d'Aix-Marseille. Faculté des sciences de Marseille. Thèse présentée à la Faculté des sciences de Marseille pour l'obtention du titre de docteur de l'Université d'Aix-Marseille, par Georges Igolen. *Contribution à l'étude de la Composition chimique de l'Essence de Lavandin*. Grasse, Imprimerie B. Arnaud, 1944; 1 vol. 24cm.

Éphémérides nautiques ou Extrait de la Connaissance des Temps pour l'an 1945, ouvrage publié par le Bureau des Longitudes spécialement à l'usage des marins. Paris, Gauthier-Villars, 1944; 1 vol. 24cm.